LUCRAREA 6

OPTIMIZAREA CONSUMULUI DE COMBUSTIBIL FOLOSIND METODA SIMPLEX PRIMAL

6.1. Aspecte generale

Metoda simplex primal este una dintre cele mai folosite metode de rezolvare a problemelor de programare liniară. Metoda se bazează pe următoarele observații:

- mulţimea soluţiilor admisibile este un poliedru convex. Un poliedru convex este o mulțime convexă care are un număr finit de puncte extremale. Se numește simplex un poliedru convex din R^n care are $(m+1)$ puncte extreme. Se numește vârf al unui poliedru un punct extrem al acestuia.
- orice punct de extrem local este un punct de extrem global, funcția obiectiv fiind liniară;
- funcția obiectiv fiind liniară, extremul se atinge într-unul din vârfurile poliedrului soluţiilor admisibile.

6.2. Algoritmul metodei simplex – primal

În cadrul acestui paragraf se va descrie modul de implementare al metodei având ca punct de plecare forma standard a problemei PL

Astfel, să consideră forma standard, scrisă matriceal, a unei probleme PL. În aceste condiții X, respectiv $C \in R^n$, $b \in R^m$, rang (A) = rang (A, b), de unde rezultă $m < n$. Astfel, este posibil să găsim m vectori a_j care să formeze o bază B din componente independente. În continuare vom avea:

$$X=\begin{bmatrix} X^B \\ X^R \end{bmatrix}; \quad A=[B, R]; \quad C=[C^B, C^R] \tag{6.1}$$

unde:

X^B – vectorul variabilelor de bază;

X^R – vectorul variabilelor secundare.

Utilizând relațiile (6.1), expresia maticeală poate fi scrisă sub forma:

$$[B\ R]\cdot\begin{bmatrix} X^B \\ X^R \end{bmatrix}=b \tag{6.2}$$

de unde rezultă:

$$X^B = B^{-1}\cdot b - B^{-1}\cdot R\cdot X^R \tag{6.3}$$

Expresia funcţiei obiectiv, ţinând cont de relaţiile (6.1), devine:

$$F = C^B \cdot X^B + C^R \cdot X^R \tag{6.4}$$

În cazul în care variabilele secundare sunt nule (X^R = 0) se poate determina o soluție de bază:

$$X^B = \overline{X}^B = B^{-1}\cdot b \tag{6.5}$$

Această soluţie este realizabilă dacă are toate componentele nenegative:

$$F = \overline{F} = C^B \cdot X^B = C^B \cdot B^{-1}\cdot b \tag{6.6}$$

Dacă notăm cu G produsul ($B^{-1} \cdot R$), relaţia (10.20) devine:

$$X^B = B^{-1}\cdot b - B^{-1}\cdot R\cdot X^R = B^{-1}\cdot b - G\cdot X^R \tag{6.7}$$

Pentru simplificarea scrierii relațiilor se vor introduce notațiile:

- $N = \{1, 2, ..., n\}$ – mulțimea indicilor vectorilor coloană ai matricei A;
- $I = \{j_1, j_2, ..., j_m\}$ – mulțimea inicilor vectorilor coloană a submatricei B;
- $J = \{N - I\}$ – mulțimea indicilor vectorilor coloană a submatricei R.

Pornind de la o soluţie de bază, aleasă arbitrar, prin modificări succesive, orientate spre creşterea funcţiei obiectiv F, se găsesc alte soluţii de bază până se obţine, în final, soluţia optimă. Astfel, metoda simplex garantează convergenţa procesului iterativ în sensul că o bază admisibilă cercetată la un moment dat nu mai revine în iteraţiile ulterioare.

Prin scrierea desfăşurată a relaţiei (6.7), ţinând cont de notaţiile de mai sus, se obţine:

$$X_s = \overline{X}_s^B - \sum_{j \in J} g_{sj} \cdot x_j\,, \quad s \in I \tag{6.8}$$

De asemenea, din relația (6.4) se deduce:

$$F = \sum_{s \in I} C_s \cdot X_s + \sum_{j \in J} C_j \cdot x_j \tag{6.9}$$

sau, eliminând variabilele de bază între relațiile (6.8) şi (6.9):

$$F = \overline{F} - \sum_{j=1}^{n} x_j (F_j - C_j) \tag{6.10}$$

unde:

$$F_j = \sum_{j \in J} C_s \cdot g_{sj} \tag{6.11}$$

Dacă dorim ca $\overline{X}_s^B$ să fie soluţie optimală, adică:

$$\overline{F} = C^B \cdot \overline{X}_s^B = C^B \cdot B^{-1} \cdot b \tag{6.12}$$

să fie maxim, este necesar ca:

$$(F_j - C_j) \ge 0 \quad (\forall)\; j \in J \tag{6.13}$$

Relaţia (6.13) reprezintă condiţia de optimalitate a problemelor PL.

În cazul în care condiția de optimalitate nu este satisfăcută, baza inițial aleasă va fi modificată. Astfel, pentru apropierea rapidă de soluția optimală este nevoie să fie îndeplinită relația:

$$(F_l - C_l) = \max_j \left| F_j - C_j \right|, \quad j \in J \tag{6.14}$$

Relaţia (6.14) reprezintă condiţia de intrare în bază pentru variabila x_l.

Pentru a determina variabila care va fi înlocuită se va determina relaţia de ieşire din bază. Pentru aceasta se va reveni la relația (6.8). Astfel, pentru variabila x_l se obţine:

$$X_s = \overline{X}_s^B - g_{sl} \cdot X_l \ge 0 \tag{6.15}$$

Dacă: $g_{sl} > 0$, rezultă $\dfrac{\overline{X}_s^B}{g_{sl}} - X_l \ge 0$, de unde:

$$\theta_k = \min_s \left\{ \frac{\overline{X}_s^B}{g_{sl}}, \quad g_{sl} \ge 0 \right\} \tag{6.16}$$

Relaţia (6.16) reprezintă condiţia de ieşire din bază.

Având în vedere aspectele teoretice evidențiate mai sus, vor fi prezentați pașii principali ai algoritmului simplex-primal:

- Pasul 1. Se alegere baza și se inițializează valorile pentru variabilele componente;
- Pasul 2. Se identifică matricele B şi R, respectiv vectorii C^B, C^R;
- Pasul 3. Se calculează matricea $G = B^{-1} \cdot R = g_{sj}$;
- Pasul 4. Se calculează diferenţele $(F_j - C_j)$, $j \in J$;
- Pasul 5. Se analizează semnele diferenţelor $(F_j - C_j)$:
  - dacă $(F_j - C_j) > 0$, atunci $\overline{X}^B$ este o soluţie optimală;
  - dacă $(F_j - C_j) < 0$, se trece la pasul următor.
- Pasul 6. Se alege variabila de intrare (l) în bază, relaţia (6.15);
- Pasul 7. Se determină variabila (k) care va părăsi baza, relația (6.16);
- Pasul 8. Cu noua bază se vor relua calculele începând cu Pasul 1, criteriul de oprire fiind cel specificat la Pasul 5.

6.3. Exemplu numeric

Să se maximizeze funcţia obiectiv:

$$F(X) = x_1 + x_2$$

în prezența resticţiilor:

$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$2x_1 - x_2 \le 2$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

folosind metoda simplex-primal.

Rezolvare:

Se construiește forma standard a modelului de optimizare:

$$\max F(X) = \max(x_1 + x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2$$

$$x_1 + x_2 + s_1 = 3$$
$$2x_1 - x_2 + s_2 = 2$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Se construieşte forma matriceală:

$$\max\left([1\,1\,0\,0]\cdot[x_1\ x_2\ s_1\ s_2]_t\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Pentru rezolvarea problemei folosind metoda simplex-primal se va alege baza:

$$X^B = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad X^R = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rezultă:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}; \quad C^B = [0 \quad 0]; \quad C^R = [1 \quad 1];$$

Iteraţia 1.

- Calculul matricei G:

$$G = \begin{bmatrix} g_{31} & g_{32} \\ g_{41} & g_{42} \end{bmatrix} = B^{-1} \cdot R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix};$$

- Se calculează diferenţele:

$$[F_1 \quad F_2] = C^B G = [0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0]$$

$$F_1 - C_1 = 0 - 1 = -1$$
$$F_2 - C_2 = 0 - 1 = -1$$

- Se analizează semnul diferenţelor calculate. Deoarece ambele diferenţe au valoarea negativă, soluţia de bază nu este optimală.
- Determinarea noii variabile care va intra în bază.

Diferenţele fiind egale în modul, oricare dintre varabilele x_1, respectiv x_2 poate să intre în bază. Fie x_1 noua variabilă care va intra în bază.

- Determinarea variabilei care va părăsi baza:

$$\theta = \min\left\{\frac{x_3}{g_{31}} = \frac{3}{1}; \frac{x_4}{g_{41}} = \frac{2}{2}\right\} = 1$$

Rezultă că variabila care va părăsi baza este variabila X_4.

- Noul set de variabile care va forma bază este:

$$X^B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ x_3 - \theta \cdot g_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \ X^R = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix};$$

Rezultă:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \ R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \ C^B = [1 \quad 0]; \ C^R = [1 \quad 0].$$

Iteraţia 2

- Calculul matricei G:

$$G = \begin{bmatrix} g_{12} & g_{14} \\ g_{32} & g_{34} \end{bmatrix} = B^{-1}R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 1 & -0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 \\ 1,5 & -0,5 \end{bmatrix}$$

- Se calculează diferenţele:

$$[F_2 \quad F_4] = C^B G = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 \\ 1,5 & -0,5 \end{bmatrix} = [-0,5 \quad 0,5]$$

$$F_2 - C_2 = -0,5 - 1 = -1,5$$
$$F_4 - C_4 = 0,5 - 0 = 0,5$$

- Se analizează semnul diferenţelor calculate. Deoarece una dintre diferenţe are valoarea negativă, soluţia de bază nu este optimală.
- Determinarea noii variabile care va intra în bază:

$$\max\{|F_2 - C_2|, |F_4 - C_4|\} = \max\{1,5; 0,5\} = 1,5$$

Rezultă că variabila care va părăsi baza este variabila X_2.

- Determinarea variabilei care va părăsi baza:

$$\theta = \min\left\{ \frac{x_1}{g_{12}} = \frac{1}{-0{,}5}; \frac{x_3}{g_{32}} = \frac{2}{1{,}5} \right\} = 1{,}333$$

Rezultă că variabila care va părăsi baza este variabila X_3.

- Noul set de variabile care va forma bază este:

$$X^B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - \theta \cdot g_{12} \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 1{,}333 \cdot (-0{,}5) \\ 1{,}333 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}666 \\ 1{,}333 \end{bmatrix};$$

$$X^R = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix};$$

Rezultă:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad C^R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iterația 3

- Calculul matricei G:

$$G = \begin{bmatrix} g_{13} & g_{14} \\ g_{23} & g_{24} \end{bmatrix} = B^{-1}R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}333 & 0{,}333 \\ 0{,}666 & -0{,}333 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0{,}333 & 0{,}333 \\ 0{,}666 & -0{,}333 \end{bmatrix}$$

- Se calculează diferențele:

$$\begin{bmatrix} F_3 & F_4 \end{bmatrix} = C^B G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}333 & 0{,}333 \\ 0{,}666 & -0{,}333 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_3 - C_3 = 1 - 0 = 1$$
$$F_4 - C_4 = 0 - 0 = 0$$

- Se analizează semnul diferențelor calculate. Condițiile de optimalitate sunt îndeplinite, soluția problemei este:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}666 \\ 1{,}333 \end{bmatrix}$$

Rezultă:

$$\max F(X) = 1{,}666 + 1{,}333 \cong 3$$

6.4. Optimizarea consumului de combustibil

Dacă într-o centrală termoelectrică cu n grupuri se cunosc consumurile specifice ale fiecărui grup și cantitatea de combustibil avută la dispoziție pe parcursul unei perioade de timp (oră, zi, lună etc) atunci producția maximă de energie electrică, având ca ipoteză încărcarea constantă a grupurilor, poate fi determinată având la bază următorul model matematic de optimizare:

$$\textbf{FO:} \quad \max(T \cdot P_1 + T \cdot P_2 + \ldots T \cdot P_n) \tag{6.17}$$

$$\textbf{RE:} \quad P_j \le P_{\max j}\,;\ j = 1,\ldots,n \tag{6.18}$$

$$T(c_{s1}P_1 + c_{s_2}P_2 + \ldots + c_{s_{2n}}P_n) \le C \tag{6.19}$$

$$P_j \ge 0 \tag{6.20}$$

unde:

P_j – puterile cu care sunt încărcate fiecare din cele j = 1, …, n grupuri ale centralei, în MW;

$P_{max\,j}$ – puterile limită maximă cu care pot fi încărcate fiecare din cele j = 1, …, n grupuri ale centralei (acestea sunt date de către producător);

T – intervalul de timp, în ore;

$c_{s\,j}$ – consumurile specifice de combustibil ale fiecărui grup j = 1, …, n al centralei;

C – cantitatea de combustibil avută la dispoziție în perioada T, în t c.c.

6.5. Desfăşurarea lucrării

1. Se studiază textul lucrării.
2. Se consideră următoarea problemă practică:

Se consideră o centrală termoelectrică cu două grupuri de 100 şi 200 MW, având consumurile specifice de 0,3, respectiv, 0,4 kg c.c./kWh. Se cere valoarea puterii, presupusă constantă în decursul unei zile pentru fiecare grup, astfel încât să se obţină producţia maximă de energie electrică a centralei, ştiind că există la dispoziţie pentru ziua respectivă o cantitate de 2000 t c.c.

Se cere:

- Să se scrie toate formele modelului matematic (standard, matriceală, vectorială și canonică.
- Să se utilizeze metoda simplex primal pentru determinarea soluției optime.
- Să se compare rezultatele cu cele obținute folosind funcția Matlab **linprog**.